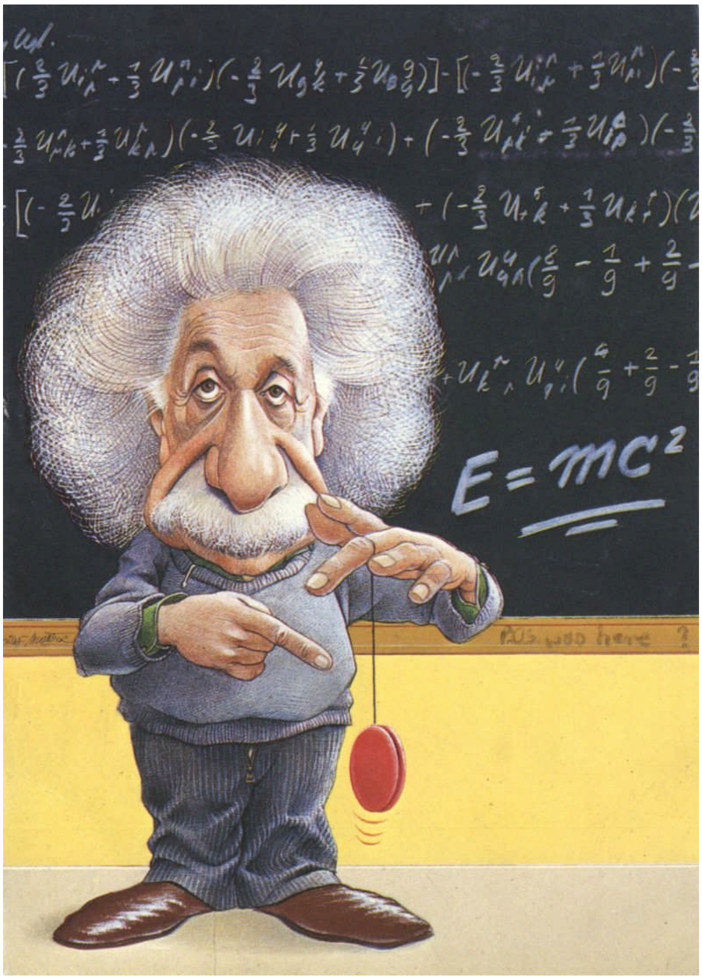
INTRODUCTION AUX MATHEMATIQUES APPLIQUEES



"Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths, je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes !" "L'imagination est bien plus importante que la connaissance."

Albert EINSTEIN (1879-1955)

Denis CLARINVAL

SEPTEMBRE 2012

CHAPITRE I : ARITHMETIQUE

ADDITIVITE ET CHANGEMENT DE SIGNE.

Règles.

- La multiplication de deux nombres négatifs donne un nombre positif ;
- La multiplication d'un nombre positif par un nombre négatif donne un nombre négatif ;
- La multiplication de deux nombres positifs donne un nombre positif.

Illustrations.

$$1-(-2)=1+2=3$$

$$1-(3-4)=1-3+4=2$$

DISTRIBUTIVITE ET MISE EN EVIDENCE.

Distributivité : illustrations.

$$2*(a-b)=2*a-2*b$$

$$(a+b)*(c+d)=a*c+a*d+b*c+b*d$$

$$(a+b)*(c-d)=a*c-a*d+b*c-c*d$$

$$(a-b)*(c-d)=a*c-a*d-b-c+b*d$$

Mise en évidence : illustrations.

$$3*a+3*b=3*(a+b)$$

$$4*a-4*b=4*(a-b)$$

Notation.

Le produit de 2 par A peut être, indifféremment noté :

$$2A=2*A=2.A$$

COMMUTATIVITE.

$$A + B = B + A$$

$$A * B = B * A$$

$$A - B = -B + A$$

ELEMENT NEUTRE ET ELEMENT ABSORBANT.

Elément neutre.

L'élément neutre pour l'addition (et la soustraction) est 0.

$$A + 0 = A$$

$$A - 0 = A$$

L'élément neutre pour la multiplication est 1.

$$1 * A = A$$

$$1 * (-A) = -A$$

Elément absorbant.

L'élément absorbant pour la multiplication est 0.

$$0 * A = 0$$

$$0 * (-A) = 0$$

$$(A + B) * 0 = 0$$

Remarque.

On ne peut pas diviser par 0 ; plus précisément la division par 0 représente un point limite inaccessible que l'on peut, mathématiquement représenter de la manière suivante (pour x positif) :

$$\lim_0 \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

OPERATIONS SUR LES FRACTIONS.

Produit de 2 fractions.

$$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{a*c}{b*d}$$

$$\frac{1}{2}*\frac{2}{3}=\frac{1*2}{2*3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Réduction au même dénominateur.

On choisit, pour l'addition de deux fractions, le plus petit commun dénominateur.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Simplification de fraction.

$$\frac{2A}{3B}+\frac{4A}{6B}=\frac{4A}{6B}+\frac{4A}{6B}=\frac{8A}{6B}=\frac{4A}{3B}$$

$$\frac{2AC}{3BC}+\frac{4AC}{6BC}=\frac{4AC}{6BC}+\frac{4AC}{6BC}=\frac{4AC}{6BC}=\frac{4A}{3B}$$

$$\frac{2AB+4BD}{6BC+4BD}=\frac{2B(A+2D)}{2B(3C+2D)}=\frac{A+2D}{3C+2D}$$

Notation.

$$\frac{1}{A}=A^{-1}$$

$$A^{-2}=\frac{1}{A^2}$$

Division de fractions.

$$\frac{2}{1/4} = 2 * \frac{4}{1} = 2 * 4 = 8$$

$$\frac{1/2}{1/4} = \frac{1}{2} * \frac{4}{1} = \frac{1*4}{2*1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{1/2}{2} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

EXERCICES.

Distributivité.

$$(2A + 4B) * (3C - 2D) =$$

$$(2A - 3B) * (2C - 4D) =$$

$$2A * (2B - 2C) =$$

Produit de fractions.

$$\frac{1}{2} * \frac{-2}{3} =$$

$$\frac{1}{4} * \frac{-2}{3} * \frac{3}{2} =$$

$$\frac{2A}{4B} * \frac{2B}{2A} * \frac{4C}{2} =$$

Produit et somme de fractions.

$$\frac{1}{2} * (\frac{2}{3} + \frac{3}{4}) =$$

$$\frac{1}{2} * (\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{1/2}) =$$

$$\frac{2A}{2C} * (\frac{2}{4A} + \frac{4}{2B}) =$$

$$\frac{ABC}{2} * (\frac{2}{A} + \frac{2}{B} + \frac{2}{C}) =$$

CHAPITRE II : ALGEBRE

LES PUISSANCES.

Produit de deux puissances.

$$X^{a} * X^{b} = X^{a+b}$$

$$X^{2} * X^{3} = X^{2+3} = X^{5}$$

$$X^{2} * X^{-3} = X^{2-3} = X^{-1} = \frac{1}{X}$$

Puissance d'un produit.

$$(A * B)^{2} = A^{2} * B^{2}$$

$$(A^{2} * B^{3})^{2} = A^{2*2} * B^{3*2} = A^{4} * B^{6}$$

Puissance d'une puissance.

$$(X^{a})^{b} = X^{a*b}$$

$$(X^{2})^{3} = X^{2*3} = X^{6}$$

$$(X^{2})^{-3} = X^{2*(-3)} = X^{-6} = \frac{1}{X^{6}}$$

Puissance d’un e fraction.

$$\left\{\frac{X}{Y}\right\}^{a} = \frac{X^{a}}{Y^{a}}$$

$$\left\{\frac{X}{Y}\right\}^{2} = \frac{X^{2}}{Y^{2}}$$

$$\left\{\frac{X^{2}}{Y^{3}}\right\}^{2} = \frac{X^{2*2}}{Y^{3*2}} = \frac{X^{4}}{Y^{6}}$$

$$\left\{\frac{2X^{2}}{3Y^{3}}\right\}^{2} = \frac{2^{2}*X^{2*2}}{3^{2}*Y^{3*2}} = \frac{4X^{4}}{9Y^{6}}$$

LES PRODUITS REMARQUABLES.

Carré d’une somme.

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(2A+3B)^2 = (2A)^2 + 2(2A)(3B) + (3B)^2 = 4A^2 + 12AB + 9B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$(A^2+B^3)^2 = A^{2*2} + 2A^2B^3 + B^{3*2} = A^4 + 2A^2B^3 + B^6$$

$$\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)^2 = \left(\frac{1}{A}\right)^2 + 2\frac{1}{A}\frac{1}{B} + \left(\frac{1}{B}\right)^2 = \frac{1}{A^2} + \frac{2}{AB} + \frac{1}{B^2}$$

Différence de deux puissances 2.

$$A^2 - B^2 = (A+B)*(A-B)$$

APPLICATION AUX MATHEMATIQUES FINANCIERES.

La capitalisation : l'intérêt composé.

Monsieur G. DUPOGNON a décidé de placer durant 5 ans la somme de 1.000,00 € ; le taux d'intérêt annuel proposé est de 10 %. Le placeur a en outre décidé de ne jamais retirer, en fin d'année, l'intérêt produit durant l'année écoulée (c'est précisément ce que l'on appelle l'intérêt composé). De combien disposera le placeur au terme des 10 années à venir.

$$1000*(1+0,10)^{10} = 2593,74$$

Les emprunts avec remboursement par annuité constante.

Monsieur G. SUY-FAUCHE souhaite emprunter la somme de 10.000,00 € ; le banquier lui propose les conditions suivantes : l'emprunt est remboursable en 5 ans par annuité constante au taux annuel nominal constant de 10 %. Combien l'emprunteur devra-t-il débourser chaque année ?

La formule générale, pour le calcul de l'annuité, est la suivante :

$$A = VA*\frac{i*(1+i)^t}{(1+i)^t-1}$$

A	Annuité constante
VA	Capital emprunté
i	Taux d'intérêt annuel nominal
t	Durée de l'emprunt

Dans notre exemple, cela donne :

$$A = 10000*\frac{0,10*(1+0,10)^5}{(1+0,10)^5-1} = 2.637,97$$

L’actualisation.

Monsieur G. DELAPATIENCE recevra, dans 5 ans la somme de 10.000,00 € ; que vaut aujourd’hui cette somme, sachant que, s’il en avait disposé immédiatement, il aurait pu, durant 5 ans, la placer au taux annuel constant de 10 %.

$$\frac{10000}{(1+0,10)^5} = 6.209,21$$

L’UTILISATION DES LOGARITHMES.

Le recours aux logarithmes est particulièrement utile quand il s’agit de déterminer la valeur d’une inconnue se trouvant en exposant.

Illustration.

Reprenons le cas de Monsieur G. DUPOGNON ; nous savons qu’il dispose d’une somme de 1.000,00 € qu’il souhaite placer au taux de 10 %. La question est la suivante : pendant combien d’années devra-t-il placer cette somme avant d’atteindre un capital de 2.593,74 € ?

On peut représenter le problème par l’expression mathématique suivante :

$$1000 * (1+0,10)^x = 2593,74$$

Bien entendu il s’agit de déterminer la valeur de x. ; on peut réécrire l’expression ci-dessus de la manière suivante :

$$(1+0,10)^x = \frac{2593,74}{1000} = 2,59374$$

$$(1,10)^x = 2,59374$$

Le membre de gauche étant égal au membre de droite, ils ont forcément le même logarithme :

$$\log\left[(1,10)^x\right] = \log(2,59374)$$

<u>Une propriété remarquable des logarithmes…</u>

$$\log(X^{a}) = a * \log(X)$$

Le problème à résoudre devient :

$$x * \log(1{,}10) = \log(2{,}59374)$$

$$x = \frac{\log(1{,}10)}{\log(2{,}59374)} = \frac{0{,}41392644}{0{,}04139269} = 10$$

Ce résultat est confirmé par le résultat obtenu précédemment…

EXERCICES.

Produits remarquables.

$$(2A - 3B)^{2} =$$

$$(A^{2} - B^{3})^{2} =$$

$$(\frac{1}{A^{2}} + \frac{1}{B^{3}})^{2} =$$

Capitalisation : l'intérêt composé.

Monsieur G. DUBLEZ souhaite placer durant 5 ans la somme de 2.000,00 € au taux annuel constant de 10 % ; de quel capital disposera-t-il dans 5 ans ?

Utilisation des logarithmes.

Retrouver la durée du placement de Monsieur G. DUBLEZ en utilisant les logarithmes.

LES RACINES.

Notation.

$$\sqrt{X} = X^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{X} = X^{1/3}$$

Racine carrée.

Dans le champ des nombres réels, seuls les nombres positifs ont une racine carrée ; en outre un réel positif a deux racines carrées :

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

Racine cubique.

La racine cubique d’un nombre positif est forcément un nombre positif ; en revanche la racine cubique d’un nombre négatif est un nombre négatif :

$$\sqrt[3]{9} = 3$$

$$\sqrt[3]{-9} = -3$$

Racine d’un produit.

$$\sqrt[3]{A*B} = \sqrt[3]{A}*\sqrt[3]{B}$$

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{4*8} = \sqrt[3]{4}*\sqrt[3]{8} = 2*\sqrt[3]{4}$$

Racine d’un quotient.

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4^{1/2}} = 4^{-1/2} = \frac{1}{2}$$

LES SUITES.

Soit un projet d'investissement quelconque dont on attend, durant les 5 années à venir, un rendement constant de 1.000,00 €. Ces flux à venir sont actualisés au taux de 10 %. La valeur actuelle de ces flux s'écrit :

$$\frac{1000}{(1+0,10)^1}+\frac{1000}{(1+0,10)^2}+\frac{1000}{(1+0,10)^3}+\frac{1000}{(1+0,10)^4}+\frac{1000}{(1+0,10)^5}$$

Notation simplifiée.

La notation simplifiée est la suivante :

$$\sum_{t=1}^{5}\frac{1000}{(1+0,10)^t}$$

EQUATIONS LINEAIRES A UNE SEULE VARIABLE.

Une équation linéaire à une seule variable est une équation de la forme :

$$aX+b=0$$

X est la variable ; cette équation est typiquement l'équation d'une droite.

Racine d'une équation linéaire à une seule variable.

Soit l'équation linéaire à une seule variable :

$$2X+4=0$$

Cette équation a pour racine unique : – 2.

$$2X+4=0 \Rightarrow 2X=-4 \Rightarrow X=\frac{-4}{2} \Rightarrow X=-2$$

Equation linéaire à une seule variable dont la solution est indéterminée.

Une équation du type $2X = 0$ est indéterminée dans le sens où elle admet une infinité de solutions.

EQUATIONS DU SECOND DEGRE (A UNE SEULE VARIABLE).

Une équation du second degré à un e seule variable est une équation du type :

$$aX^2 + bX + c = 0$$

Les coefficients a, b et c sont des constantes ; une telle équation admet, au plus, deux solutions réelles.

Le discriminant.

Le discriminant d'une telle équation s'écrit :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Les solutions de l'équation sont :

$$(X_1, X_2) = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Illustration N° 1.

Soit l'équation du second degré : $2X^2 + 5X + 2 = 0$

Son discriminant est : $\Delta = 5^2 - 4*2*2 = 25 - 9 = 16$

Les solutions sont :

$$(X_1, X_2) = \frac{-5 \pm \sqrt{16}}{2*2} = \frac{-5 \pm 4}{4} = (\frac{-5-4}{4}; \frac{-5+4}{4}) = (\frac{-9}{4}; \frac{-1}{4})$$

Illustration N° 2.

Soit l'équation du second degré : $X^2 + 4X + 6,25 = 0$

Son discriminant est : $\Delta = 4^2 - 4*1*6,25 = 16 - 25 = -9$

Les solutions sont :

$$(X_1, X_2) = \frac{-5 \pm \sqrt{-9}}{2*2}$$

Cette équation n'admet aucune solution réelle.

<u>Remarque.</u>

Si cette équation n'admet aucune solution réelle, elle admet néanmoins deux solutions complexes qui sont :

$$(X_1, X_2) = \frac{-5 \pm \sqrt{-9}}{2*2} = (\frac{-5-3i}{4}; \frac{-5+3i}{4})$$

Avec : $\sqrt{-1} = i$

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES A PLUSIEURS VARIABLES.

Systèmes de 2 équations linéaires à deux variables.

Un système de 2 équations linéaires à deux variables est un système de la forme :

$$4X + 2Y - 2 = 0$$
$$2X + 3Y + 2 = 0$$

Un tel système se résout aisément en soustrayant de la 1ère équation le double de la seconde équation :

$$4X + 2Y - 2 - 2*\left[2X + 3Y + 2\right] = 0$$

Il suffit ensuite d'utiliser la distributivité :

$$4X + 2Y - 2 - 4X - 6Y - 4 = 0$$

On constate que les deux facteurs en X s'annulent et que ne subsistent, outre les constantes, que deux facteurs en Y :

$$2Y - 6Y - 2 - 4 = 0$$

La résolution nous livre la valeur de Y :

$$-4Y - 6 = 0$$
$$-4Y = 6$$
$$Y = -1,5$$

Il suffit alors d'introduire la valeur de Y dans l'une des 2 équations, par exemple la 1ère ; on obtient :

$$4X + 2*(-1,5) - 2 = 0$$
$$4X - 3 - 2 = 0$$
$$4X - 5 = 0$$
$$4X = 5$$
$$X = 1,25$$

Systèmes indéterminés.

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues est indéterminé (autrement dit il admet une multitude de solutions) quand il existe une relation linéaire entre les deux équations.

Exemple.

$$4X + 2Y - 2 = 0$$
$$8X + 4Y - 4 = 0$$

On constate que la seconde équation est égale au double de la première.

Le déterminant des coefficients.

On peut aisément vérifier si un système est soluble en calculant le déterminant des coefficients des variables.

Un déterminant 2 x 2 se calcule de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a*d - c*b$$

Quand le déterminant n'est nul, cela signifie que le système n'est pas soluble.

Illustration N° 1.

Reprenons le 1er système étudié :

$$4X + 2Y - 2 = 0$$
$$2X + 3Y + 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4*3 - 2*2 = 12 - 4 = 8$$

Le déterminant étant différent de 0, le système est donc soluble.

Illustration N° 2.

Reprenons à présent le 2ème système étudié :

$$4X + 2Y - 2 = 0$$

$$8X + 4Y - 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 4*4 - 8*2 = 16 - 16 = 0$$

Le déterminant étant nul, le système est indéterminé.

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES A PLUSIEURS INCONNUES.

En règle général, quand le nombre d'équations (et d'inconnues) est supérieur ou égal à 3, on utilise, pour la résolution de tels systèmes, le calcul matriciel et/ou le calcul des déterminants (application de la règle de KRAMER : utilisation du calcul des déterminants uniquement).

En tout état de cause le système doit présenter autant d'équations que d'inconnues ; en outre il ne peut y avoir de relation linéaire entre deux des équations sous peine de nullité du déterminant des coefficients des variables et donc d'insolubilité du système.

La résolution de tels systèmes sort du cadre de cette introduction.

EXERCICES.

Equations du second degré à une seule variable.

$$4X^2 - 2X + 4 = 0$$

$$3X^2 + 4X + 2 = 0$$

$$2X^2 + 4X = 0$$

Systèmes de 2 équations linéaires à 2 inconnues.

Exercice N° 1.

$$2X + 2Y - 8 = 0$$

$$X - 2Y + 2 = 0$$

Exercice N° 2.

$$2X + 2Y - 8 = 0$$

$$4X - 2Y + 2 = 0$$

Exercice N° 3.

$$3X + 6Y - 3 = 0$$

$$-X + 2Y - 1 = 0$$

CHAPITRE III : ANALYSE

FONCTIONS LINEAIRES D'UNE SEULE VARIABLE.

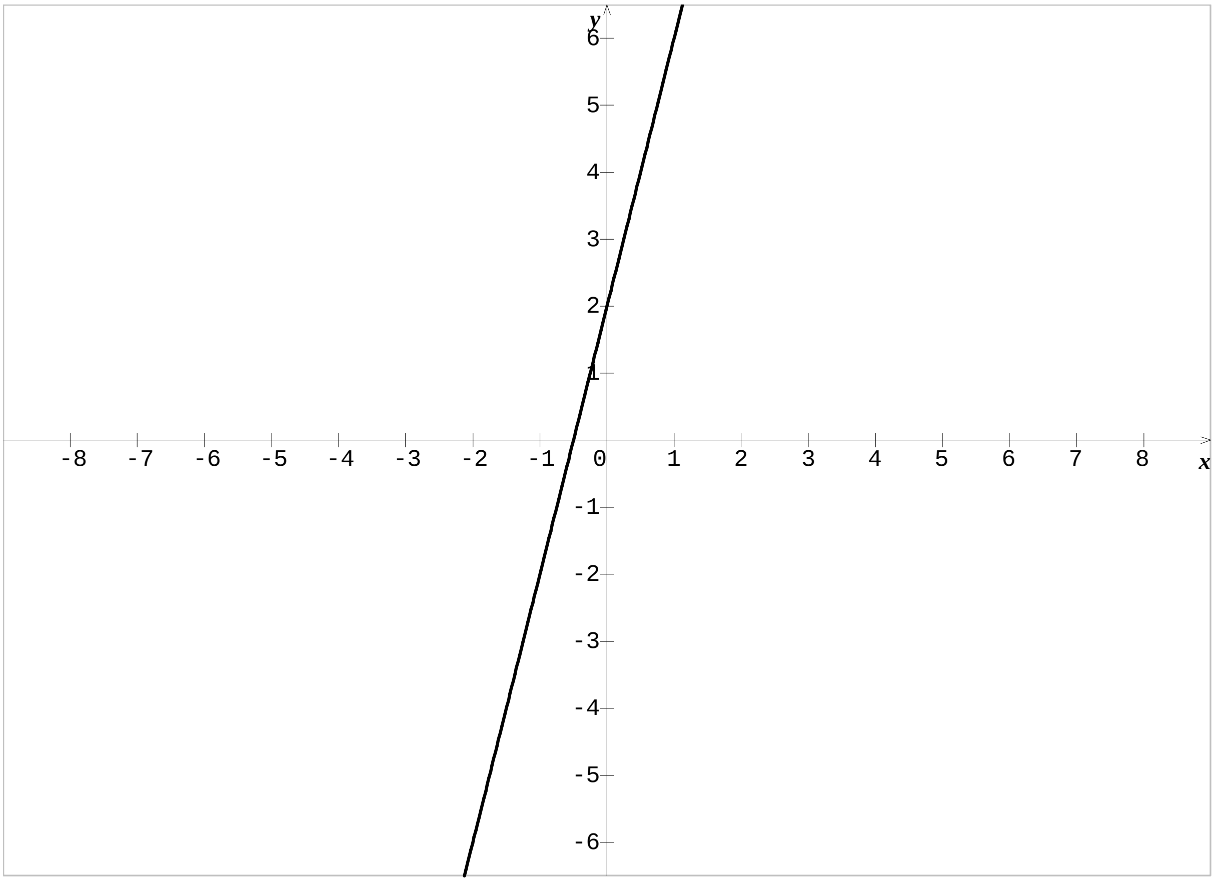
Une fonction linéaire d'une seule variable x est une fonction du type :

F(x) = ax + b

Dans cette fonction, a et b sont des constantes. Cette fonction est typiquement représentée par une droite.

Illustration.

Soit la fonction : f(x) = 4x + 2 ; sa représentation graphique est la suivante :



FONCTIONS NON LINEAIRES D'UNE SEULE VARIABLE.

Une fonction non linéaire d'une seule variable x est une fonction dans la quelle :

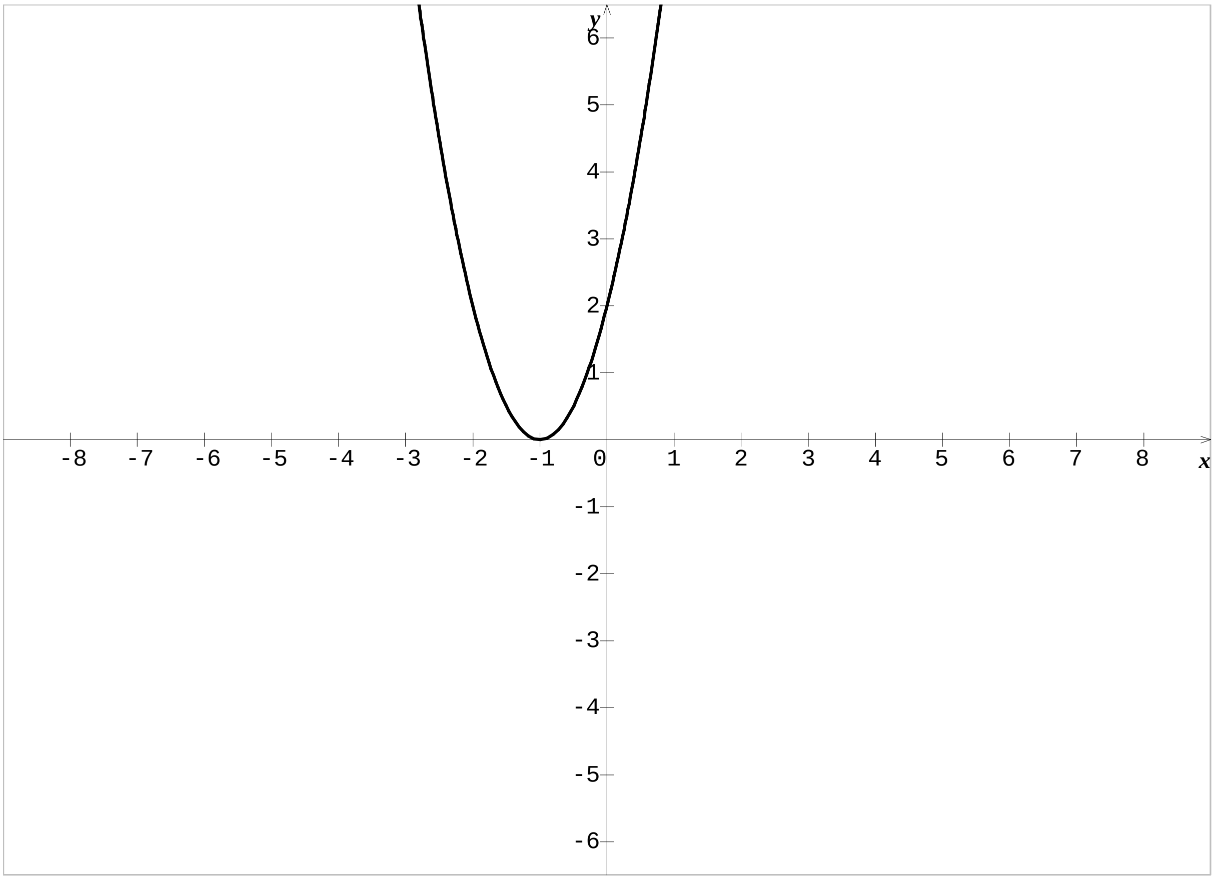
- Soit intervient une puissance de la variable ;
- Soit une fonction non linéaire de cette variable : logarithme, racine, exponentielle, fonction trigonométrique,…

Illustration.

Soit la fonction non linéaire d'une seule variable x :

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$$

La représentation graphique est la suivante :



LES DERIVEES.

Les dérivées jouent un rôle essentiel dans l'étude des fonctions non linéaires ; d'un point de vue pratique (applications économiques notamment), les dérivées sont des indicateurs de la pente de la courbe représentant une fonction non linéaire.
On abordera successivement les dérivées 1ères, les dérivées secondes et les dérivées partielles.

Les dérivées premières.

Soit la fonction linéaire déjà étudiée : f(x) = 4x + 2 ; sa dérivée première est donnée par :

$$f\,'(x) = 4$$

Notation.

Les notations suivantes sont équivalentes :

$$f\,'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\delta f}{\delta x}$$

Dérivée de fonctions non linéaires comportant des puissances de la variable x.

Soit la fonction : $f(x) = a x^{\alpha} + bx + c$

Sa dérivée première est donnée par :

$$f\,'(x) = a * \alpha * x^{\alpha - 1} + b$$

Exemple N° 1.

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$$

$$f'(x) = 2*2*x^{2-1} + 4 = 4x + 4$$

Exemple N° 2.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 4x + 2$$

$$f'(x) = 6x^2 + 4x + 4$$

<u>Exercices.</u>

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = 4x^2 - 2x + 4$$

$$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 2$$

Dérivées de fonctions usuelles.

FONCTION	DERIVEE
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Dérivée d'une somme de feux fonctions.

Soit deux fonctions dérivables f(x) et g(x) ; la dérivée de leur somme s'écrit :

$$(f+g)' = f' + g'$$

Dérivée du produit de deux fonctions.

Soit deux fonctions dérivables f(x) et g(x) ; la dérivée de leur produit s'écrit :

$$(f*g)' = f'g + fg'$$

Dérivée du quotient de deux fonctions.

Soit deux fonctions dérivables f(x) et g(x) ; la dérivée de leur quotient s'écrit :

$$\left\{\frac{f}{g}\right\}' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Illustrations.

Soit deux fonctions non linéaires de x dérivables définies par :

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$$
$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 4$$

Dérivée d'une somme.

$$f'(x) = 4x + 4$$
$$g'(x) = 6x^2 + 6x + 1$$
$$(f + g)' = 4x + 4 + 6x^2 + 6x + 1$$
$$(f + g)' = 6x^2 + 10x + 5$$

Dérivée d'un produit.

$$(f * g)' = \left[4x + 4\right] * \left[2x^3 + 3x^2 + x + 4\right] + \left[2x^2 + 4x + 2\right] * \left[6x^2 + 6x + 1\right]$$
$$(f * g)' = \left[8x^4 + 12x^3 + 4x^2 + 8x^3 + 12x^2 + 4x + 16\right]$$
$$+ \left[12x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 24x^3 + 24x^2 + 4x + 12x^2 + 12x + 2\right]$$
$$(f * g)' = \left[8x^4 + 20x^3 + 16x^2 + 4x + 16\right] + \left[12x^4 + 36x^3 + 38x^2 + 16x + 2\right]$$
$$(f * g)' = 20x^4 + 56x^3 + 54x^2 + 20x + 18$$

Dérivée d'un quotient.

$$\left\{\frac{f}{g}\right\}' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left\{\frac{f}{g}\right\}' = \frac{\left[8x^4+20x^3+16x^2+4x+16\right]-\left[12x^4+36x^3+38x^2+16x+2\right]}{\left[2x^3+3x^2+x+4\right]^2}$$

$$\left\{\frac{f}{g}\right\}' = \frac{-4x^4-16x^3-22x^2-12x+14}{\left[2x^3+3x^2+x+4\right]*\left[2x^3+3x^2+x+4\right]}$$

$$\left\{\frac{f}{g}\right\}' = \frac{-4x^4-16x^3-22x^2-12x+14}{4x^6+62x^5+2x^4+82x^3+6x^5+9x^4+3x^3+12x^2+2x^4+3x^3+x^2+4x+8x^3+12x^2+4x+16}$$

$$\left\{\frac{f}{g}\right\}' = \frac{-4x^4-16x^3-22x^2-12x+14}{4x^6+68x^5+13x^4+96x^3+25x^2+8x+16}$$

Dérivée d'une fonction non linéaire « complexe ».

Soit la fonction non linéaire :

$$f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x^3} + \sqrt{x} + 4\ln(x) + e^{2x}$$

Sa dérivée première s'écrit :

$$f'(x) = 4x + \frac{3}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x} + 2e^x$$

$$f'(x) = 2e^x + 4x + \frac{6\sqrt{x} + x^4 + 8x^3\sqrt{x}}{2x^4\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 2e^x + 4x + \frac{x^4 + 2\sqrt{x}(4x^3 + 3)}{2x^4\sqrt{x}}$$

Les dérivées secondes.

La dérivée seconde (ou d'ordre 2) d'une fonction f(x) est la dérivée première de la dérivée première de cette fonction.

Notation.

Les notations suivantes sont équivalentes :

$$f''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Illustration.

Soit la fonction non linéaire : $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$

Sa dérivée première s'écrit : $f'(x) = 4x + 4$

Sa dérivée seconde s'écrit : $f''(x) = 4$

Exemple.

Soit la fonction :

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + \ln(x) + 4$$

Sa dérivée première s’écrit :

$$f'(x) = 12x^2 + 4x + \frac{1}{x}$$

Sa dérivée seconde s’écrit :

$$f''(x) = 24x + 4 - \frac{1}{x^2}$$

Exercices.

Calculer la dérivée seconde des fonctions suivantes :

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 4x + 2$$
$$f(x) = 2x^2 + 2\ln(x) + 2e^x$$
$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{2}{x^3}$$

Utilité.

Les dérivées secondes de fonctions non linéaires sont particulièrement utiles pour évaluer la concavité (ou la convexité) de ces fonctions ; elles permettent en outre de déterminer, pour ces fonctions, d’éventuels points d’inflexion (changement de type de concavité en un point). La fonction x^3 illustre particulièrement bien ce phénomène : nous l’illustrerons plus loin.

Les dérivées partielles.

Les dérivées partielles s'appliquent aux fonctions de plusieurs variables ; elle présentent, comme les dérivées étudiées précédemment, plusieurs ordres : ordre 1, ordre 2,…

Les dérivées partielles jouent un rôle essentiel dans l'optimisation (recherche d'un maximum ou d'un minimum) de fonctions non linéaires ; en outre elles interviennent dans la composition des équations différentielles à plusieurs variables.

<u>Illustration N ° 1.</u>

Soit la fonction non linéaire suivante :

$$f(x,y) = 4x^3 + 6y^2 + 2x^2 + 4x + 2y + 4$$

La dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x s'écrit :

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 12x^2 + 4x + 4$$

La dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y s'écrit :

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 12y + 2$$

<u>Illustration N° 2.</u>

Soit la fonction non linéaire suivante :

$$f(x,y) = 4x^3 + 2y^2 + 4xy + 2x - 2y + 6$$

La dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x s'écrit :

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 12x^2 + 4y + 2$$

La dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y s'écrit :

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 4y + 4x - 2$$

<u>Illustration N° 3.</u>

Soit la fonction non linéaire suivante :

$$f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 4xy + 2x - 2y + 6$$

La dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x s'écrit :

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 8x + 4y + 2$$

La dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y s'écrit :

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 4y + 4x - 2$$

Nous obtenons un système de deux équations linéaires à 2 inconnues :

$$8x + 4y + 2 = 0$$
$$4x + 4y - 2 = 0$$

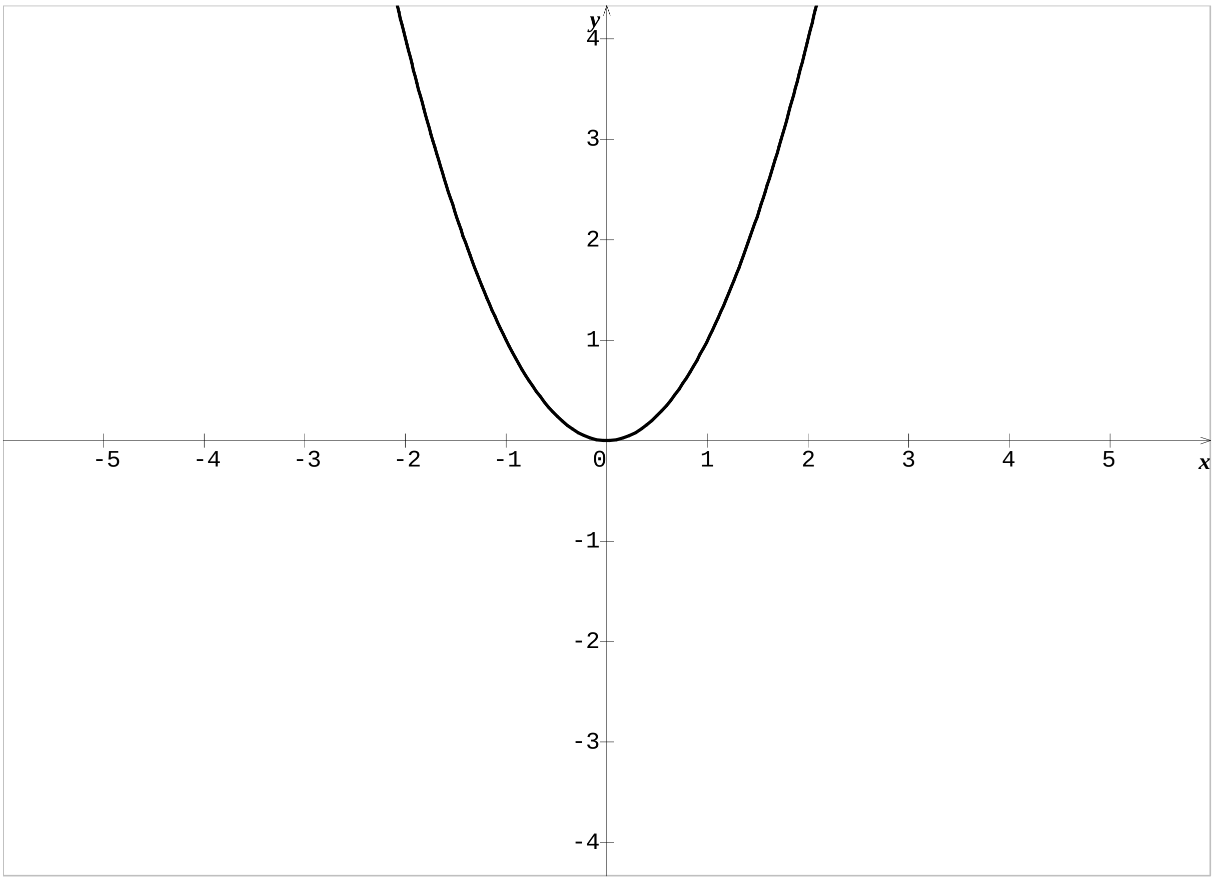
Ce système de 2 équations à 2 inconnues est soluble ; en effet :

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8*4 - 4*4 = 32 - 16 = 16$$

En outre le fait que le déterminant des coefficients des variables soit positif indique que la solution du système de 2 équations représente un maximum absolu (un optimum) pour cette fonction ; si le déterminant avait été négatif, la solution du système eût été un minimum absolu pour cette fonction.

LA FONCTION $f(x) = x^2$.

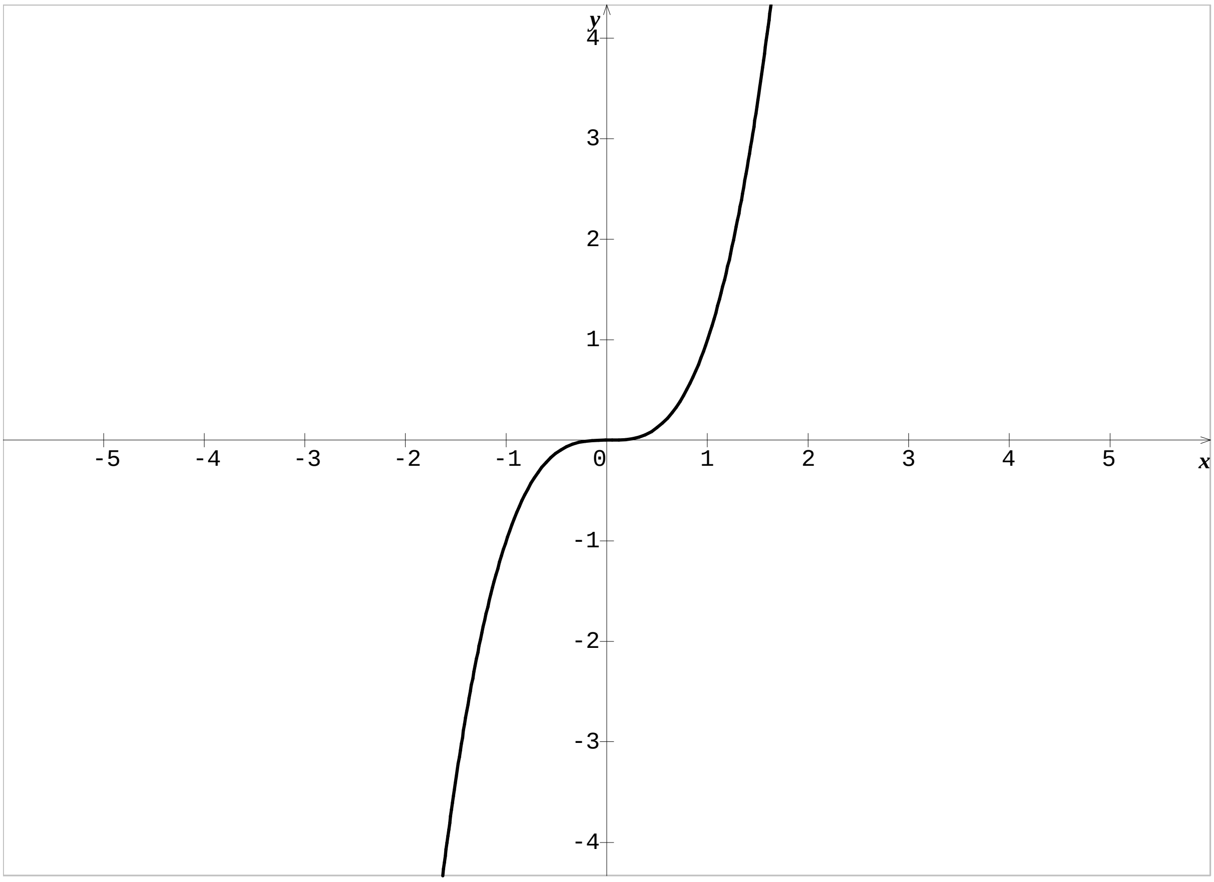
Représentation graphique.



Il s'agit d'une fonction strictement convexe qui présente un minimum absolu en x = 0 ; sa dérivée 1ère est négative pour tout x < 0 et positive pour tout x > 0.

LA FONCTION $f(x) = x^3$.

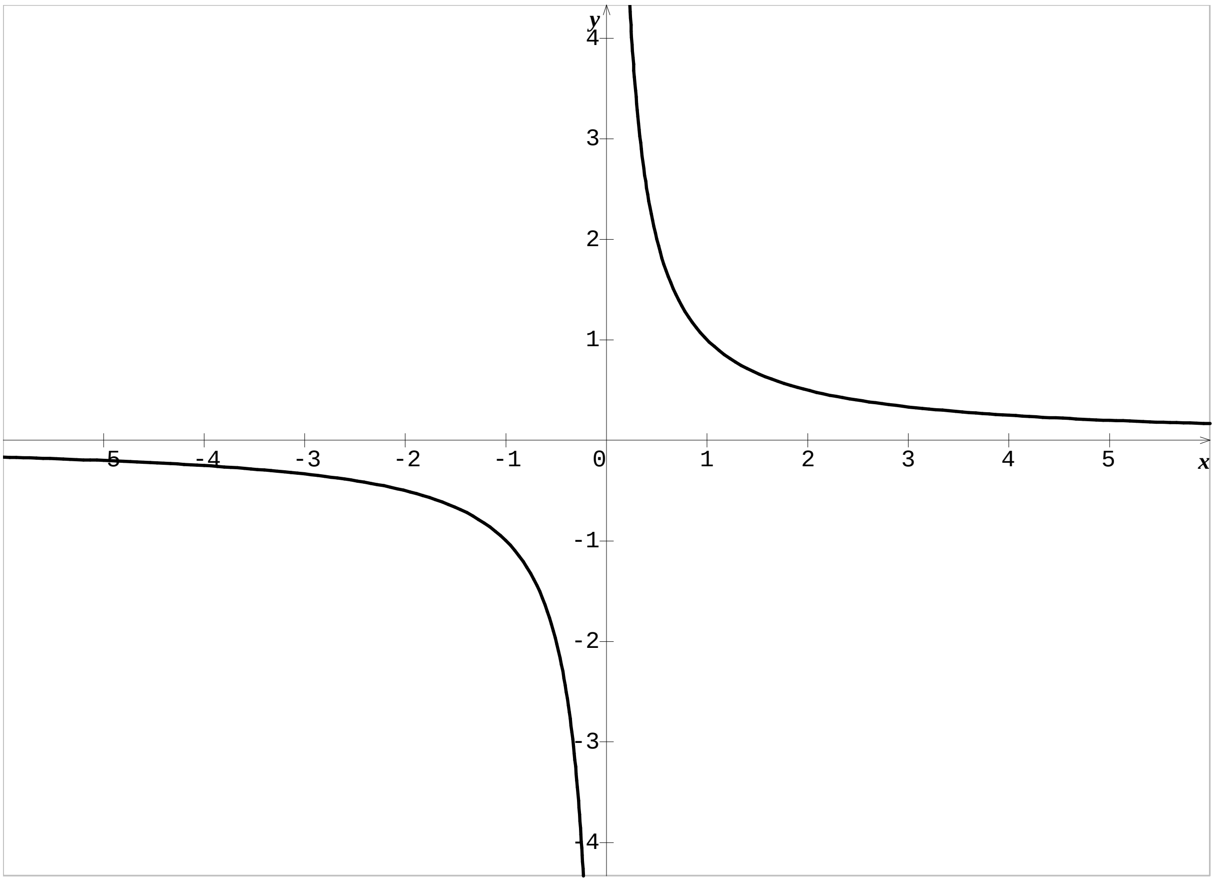
Représentation graphique.



Cette fonction présente un point d'inflexion en x = 0 ; elle est strictement concave pour tout x < 0 et strictement convexe pour tout x > 0.
Pour tout x < 0, la dérivée seconde de cette fonction f''(x) = 6x est strictement négative ; inversement, pour tout x > 0, la dérivée seconde est strictement positive.

LA FONCTION INVERSE $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Représentation graphique.

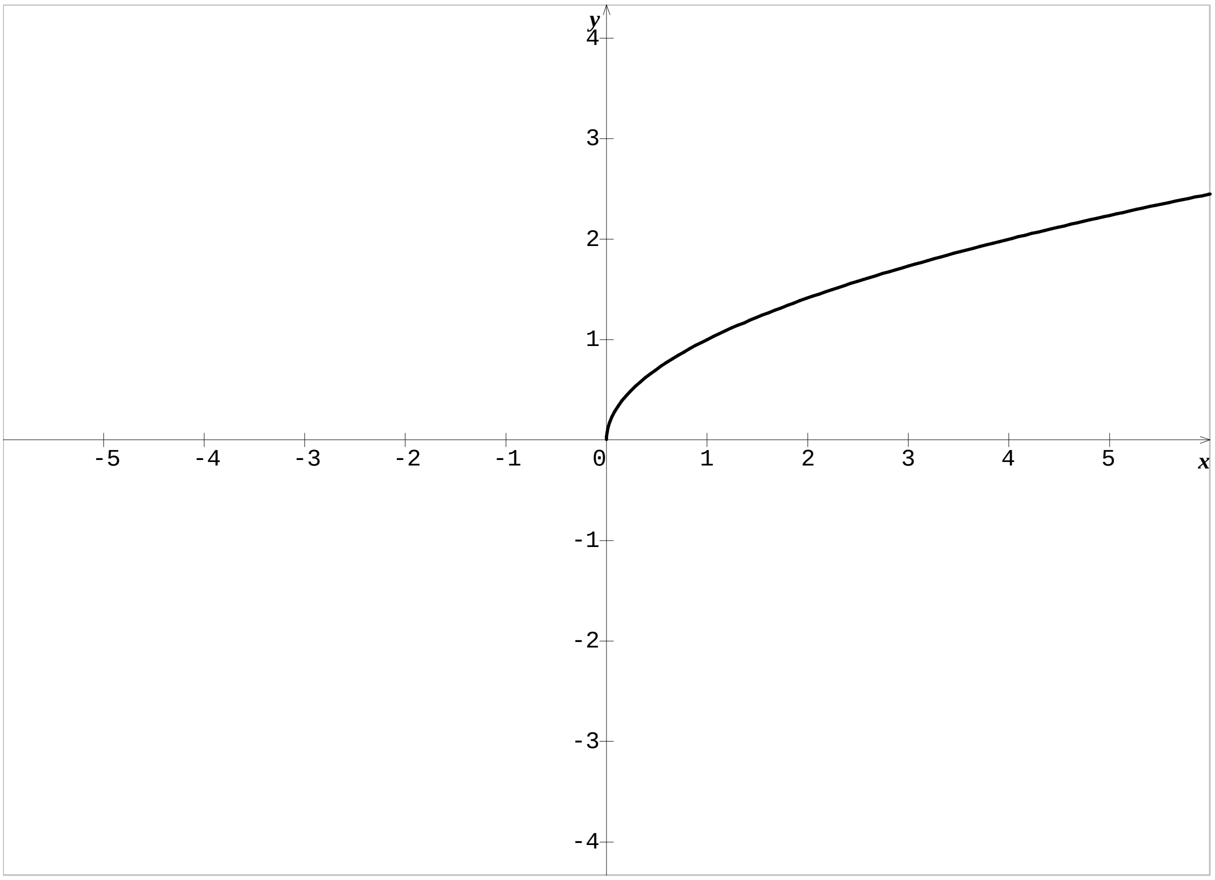


Comme on peut le remarquer, la fonction inverse est composée de deux paraboles ; en outre, comme on s'y attendait, elle n'est pas définie en x = 0.
Sa dérivée première est en tout point, excepté x = 0, strictement négative ; en effet :

$$f'(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$$

LA FONCTION RACINE CARREE.

Représentation graphique.

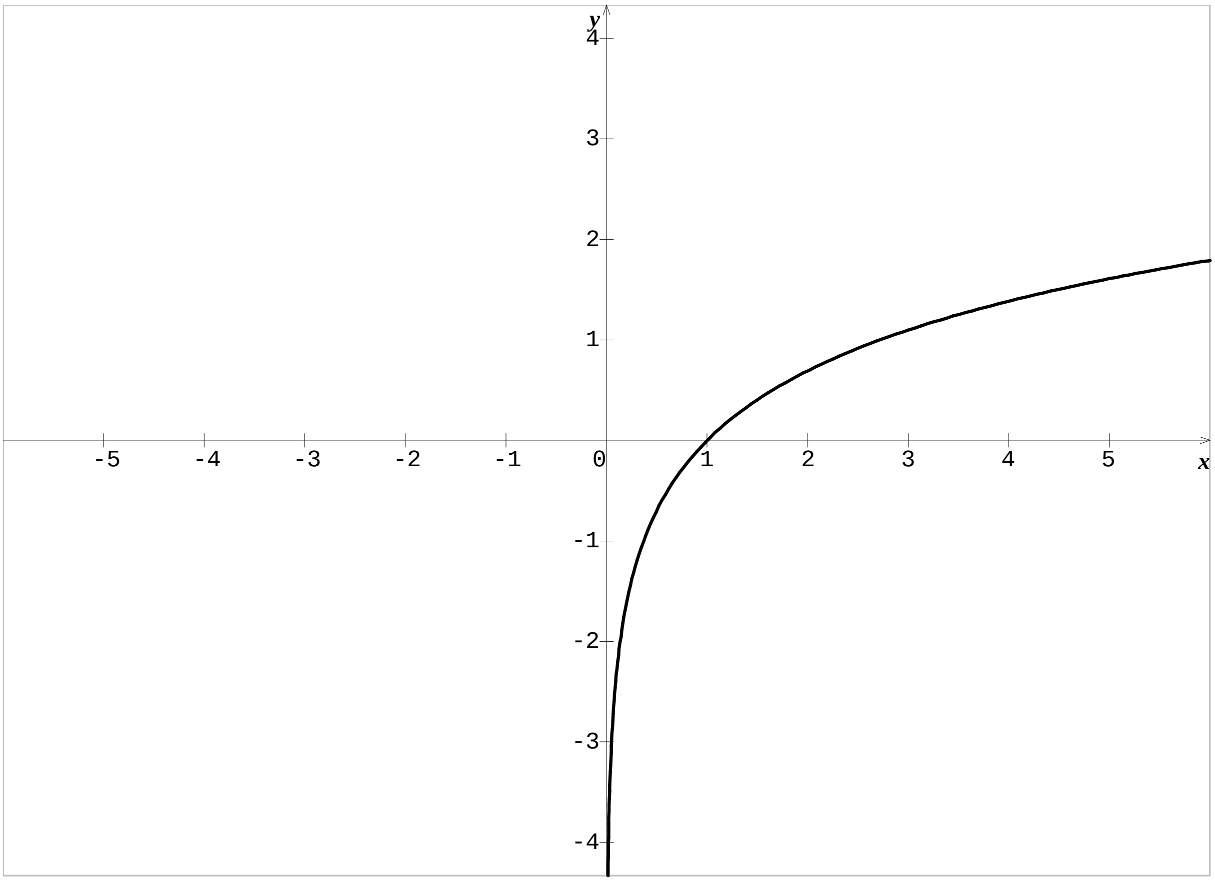


Cette fonction est définie pour tout réel x ≥ 0 ; sa dérivée première est toujours positive mais n'est pas définie pour x = 0 :

$$f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

LA FONCTION $f(x) = \ln(x)$.

Représentation graphique.



Le domaine de définition de la fonction f(x) = ln(x) est $]0, +\infty]$; cela signifie que cette fonction n'est pas définie pour tout x ≤ 0.

Sa dérivée première est toujours positive :

$$f'(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Les logarithmes furent inventés par John NAPIER (NEPER en France), mathématicien écossais (1550-1617) ; le logarithme népérien ln tire son nom de son découvreur.

On a précédemment utilisé les logarithmes pour déterminer la valeur d'une variable placée en exposant.

Le logarithme népérien exprime la puissance à laquelle il faut élever le nombre e pour obtenir ce nombre.

Avec e = 2,7182818284…

<u>Exemple.</u>

Ln(5) = 1,609443791 ; ce qui signifie que :

$$e^{1,609443791} = 5$$

<u>Remarque</u> : $\ln(e) = 1$

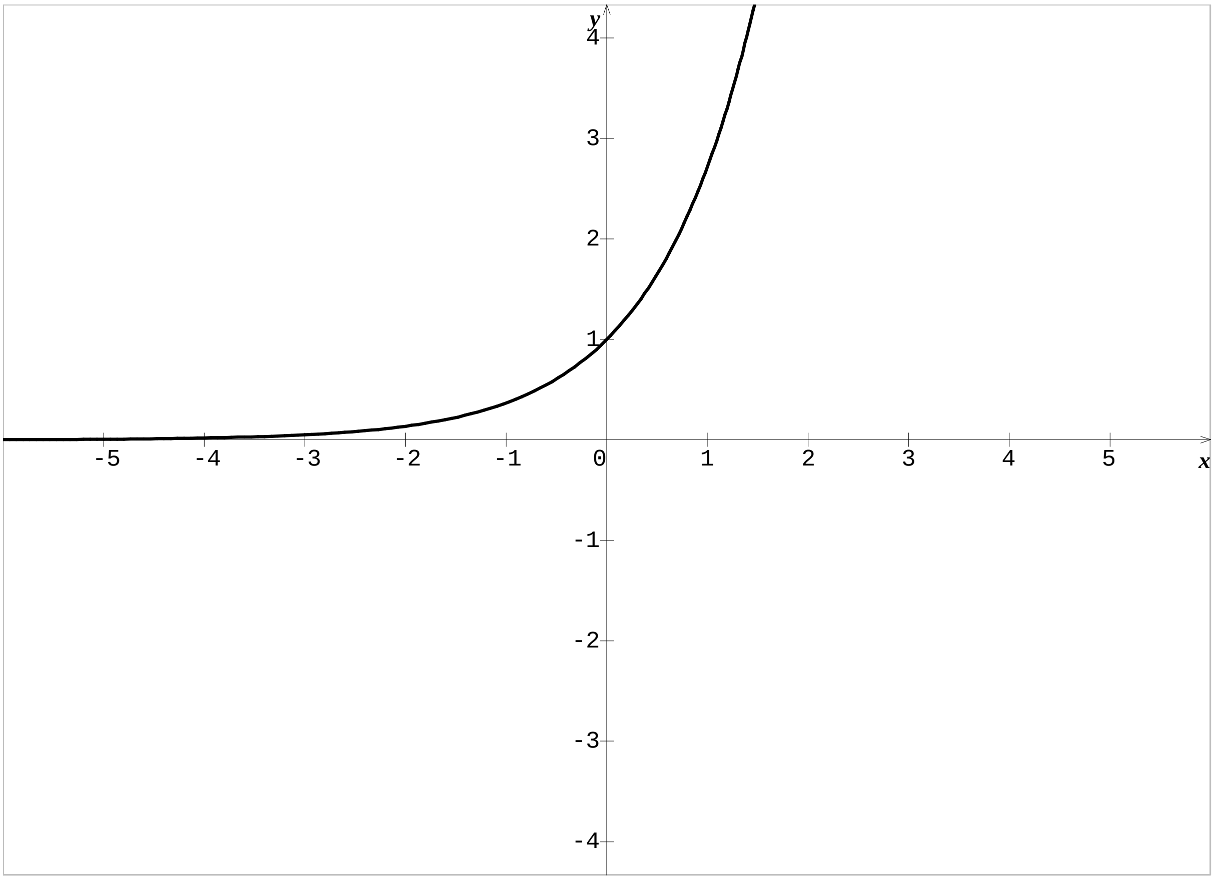
Les changements de base.

On utilise en général les logarithmes en base 10 et en base notés respectivement log(x) et ln(x) ; on peut néanmoins exprimer le logarithme d'un nombre dans une base quelconque en utilisant un logarithme dans une autre base :

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

LA FONCTION EXPONENTIELLE $f(x) = e^x$.

Représentation graphique.



On notera que :

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e$$

La fonction exponentielle est partout définie dans l'ensemble des nombres réels R ; sa dérivée première est :

$$f\,'(e^x) = e^x$$

La dérivée première et la dérivée seconde (qui est la même que la 1ère) de cette fonction est toujours positive ; la positivité de la dérivée 1ère explique la croissance constante tandis que celle de la dérivée 2ème explique la convexité.

CHAPITRE IV : ELEMENTS DE STATISTIQUES.

LA LOI BINOMIALE.

La loi binomiale est une loi de probabilité qui correspond à l'expérience suivante : on renouvelle n fois une épreuve de BERNOULLI : épreuve aléatoire à deux issues possibles dénommées respectivement « succès » et « échec ». On désigne la probabilité d'un succès à chaque épreuve par la lettre π.

Jacques BERNOULLI, mathématicien suisse (1654-1705).

Formulation mathématique.

$$p(s) = \binom{n}{s} * \pi^{s} * (1-\pi)^{n-s}$$

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!}$$

Les tables statistiques.

Il existe fort heureusement des tables statistiques qui nous dispensent de déterminer les probabilités au moyen des formules mathématiques présentées ci-dessus : il s'agit des tables IIIB et IIIC.

Illustration N° 1.

Quand on lance en l'ai une pièce de monnaie, on sait que l'on a une chance sur deux que, en retombant, sa face supérieure soit « pile » (du reste il en est de même pour la face « face ») ; autrement dit, à chaque nouveau lancer, la probabilité d'un succès est : $\pi = 0,5$.

Supposons à présent que la pièce soit lancée 5 fois de suite, quelle est la probabilité d'obtenir, pour l'ensemble des 5 lancers, 4 fois la face « pile » (succès) ?

Il suffit, pour trouver la solution, de consulter la table IIIB.
Les entêtes de colonnes nous donnent diverses valeurs de π ; en ce qui nous concerne, c'est la colonne correspondant à $\pi = 0,5$ qui nous intéresse.
La 1ère colonne nous donne diverses valeurs de n qui correspond, dans notre exemple, au nombre de lancers : n = 5.
La 2ème colonne nous donne, pour les différentes valeurs de n, différentes valeurs de s, c'est-à-dire le nombre de succès ; dans notre cas, s = 4.

Il suffit donc de balayer la ligne correspondant à n = 5 et à s = 4, jusqu'à la colonne correspondant à $\pi = 0,5$; on trouve la valeur p(s) = 0,156 = 15,60 %.

Illustration N° 2.

On aurait pu se poser une autre question : quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 succès. Cette probabilité est la somme de la probabilité d'obtenir 4 succès et de la probabilité d'obtenir 5 succès.

$P(s \geq 4) = p(s = 4) + p(s = 5) = 0,156 + 0,031 = 0,187.$

Utilisation de la table IIIC.

La table IIIC se présente comme la table IIIB, mis à part le fait qu'elle nous livre immédiatement les probabilités cumulées.

Dans notre exemple, il suffit de balayer la ligne correspondant à n = 5 et à s = 4 jusqu'à la colonne correspondant à $\pi = 0,5$; on trouve immédiatement $p(s \geq 4) = 0,187$.

LA LOI NORMALE.

La loi normale a été développée par le mathématicien allemand Johann Carl Friedrich GAUSS (1777-1855).

La loi normale présente le grand avantage de pouvoir être caractérisée par deux grandeurs : la moyenne et l'écart-type.

En sciences de gestion, la loi normale est incontournable : il est fermement admis que toutes les variables étudiées obéissent à une loi normale.

La loi normale permet, à partir d'échantillons issus de vastes populations, de faire des inférences statistiques sur ces populations, de tester des hypothèses ou encore de calculer des probabilités.

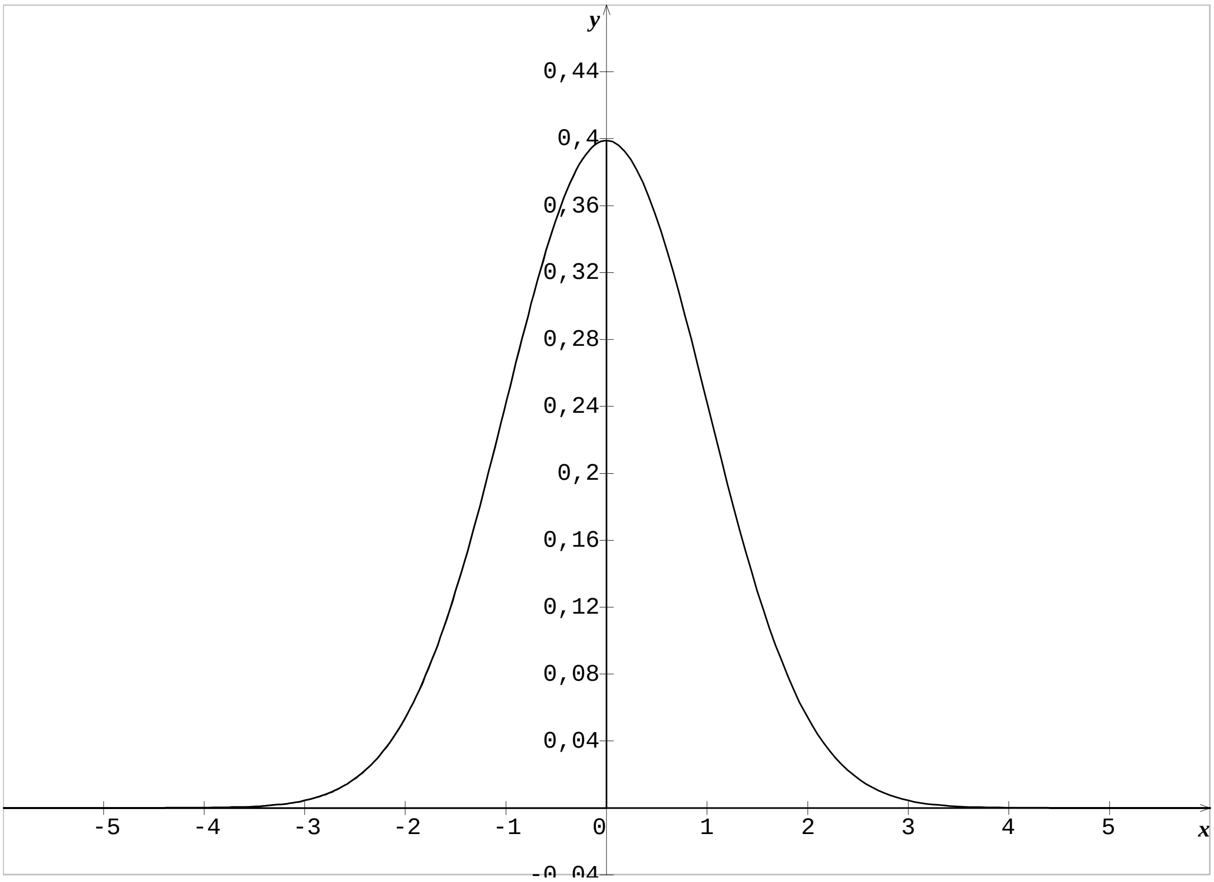
La loi normale centrée réduite.

La loi normale centrée réduite est un cas particulier de la loi normale dont les paramètres sont :

- Moyenne : $\mu = 0$
- Ecart-type : $\sigma = 1$

Elle est essentielle pour déterminer des probabilités dans le cadre d'une loi normale générale ; elle joue également un rôle essentiel en finance pour l'évaluation des options.

Représentation graphique.



La courbe qui coiffe l'ensemble des probabilités est une courbe de GAUSS ; la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est l'ensemble des probabilités ; le total des probabilités étant toujours égal à 1, la surface en question est donc, elle aussi, égale à 1.
On remarque une parfaite symétrie de l'ensemble : la surface de la partie située à gauche de l'axe des ordonnées (correspondant à la moyenne) est strictement identique à la surface de la partie située à droite.

Expression mathématique.

L'ensemble de la surface coiffée par la courbe peut être déterminée de la manière suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

La courbe de Gauss est caractérisée par la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Les tables statistiques.

Fort heureusement il existe, ici aussi, des tables statistiques qui nous dispensent de calculer les probabilités à l'aide des formules mathématiques ci-dessus (du reste l'intégrale n'est pas soluble par les méthodes classiques d'intégration et elle ne peut être résolue que par approximation). La table correspondant à la loi normale centrée réduite est la table IV.

Notations.

On retiendra les notations courantes suivantes :

- Moyenne : $\overline{X}$
- Variance : σ^2
- Ecart-type : σ

Illustration : calcul de moyenne, de variance et d'écart-type d'un échantillon.

Un professeur de statistiques a extrait au hasard, parmi les nombreuses copies d'examen conservées aux archives, un échantillon de 10 copies ; les examens sont évalués sur 20 points.

A chacune des 10 copies sera associée une probabilité de 0,10 dans la mesure où aucune copie n'avait, en raison du caractère aléatoire du tirage, plus de chance qu'une autre d'être tirée.

Cotes : X	**P(X)**	**P(X) * X**	$X - \overline{X}$	$(X - \overline{X})^2$	$(X - \overline{X})^2 * P(X)$
14	0,10	1,4	0,2	0,04	0,004
16	0,10	1,6	2,2	4,84	0,484
15	0,10	1,5	1,2	1,44	0,144
18	0,10	1,8	4,2	17,64	1,764
12	0,10	1,2	-1,8	3,24	0,324
19	0,10	1,9	5,2	27,04	2,704
20	0,10	2	6,2	38,44	3,844
8	0,10	0,8	-5,8	33,64	3,364
10	0,10	1	-3,8	14,44	1,444
6	0,10	0,6	-7,8	60,84	6,084
	$\overline{X}$	13,8		σ^2	20,16
				σ	4,49

Calcul de la moyenne, de la variance et de l'écart-type.

$$\overline{X} = \sum X * P(X)$$

$$\sigma^2 = \sum (X - \overline{X})^2 * P(X)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Calcul de probabilité.

Supposons à présent que l'ensemble des copies archivées (la population) présente une moyenne μ = 14 et un écart-type σ = 3 ; si on tire au hasard un échantillon de 9 copies, quelle est la probabilité que parmi ces 9 copies on observe au moins une cote supérieure à 16.

Calcul de Z.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma_{\overline{X}}}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

$$Z = \frac{16 - 14}{1} = 2$$

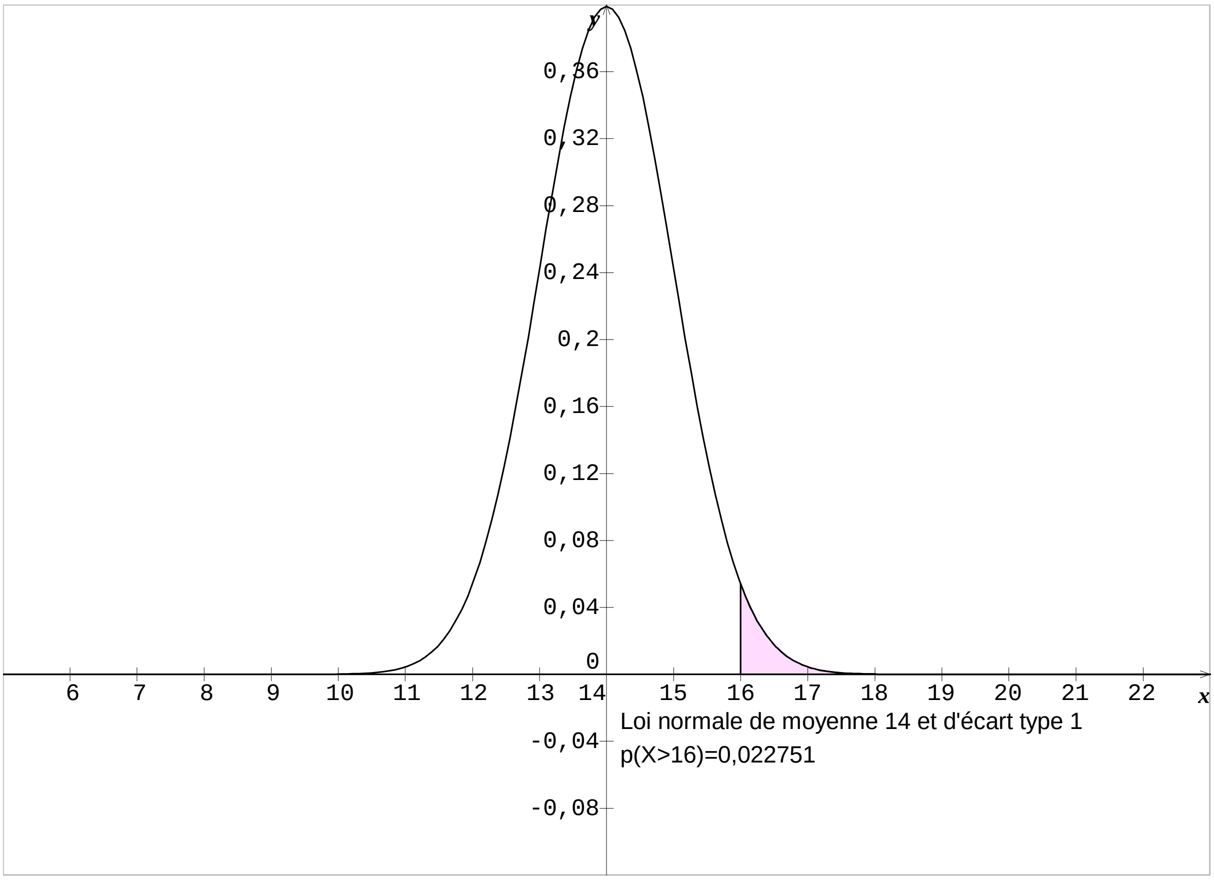
Calcul de P(X ≥ 16).

$P(X \geq 16) = P(Z \geq 2) = 0{,}023$

Utilisation de la table IV.

La première colonne donne la valeur de Z avec sa 1ère décimale ; les entêtes de colonnes donnent la 2ème décimale de Z.

Représentation graphique.

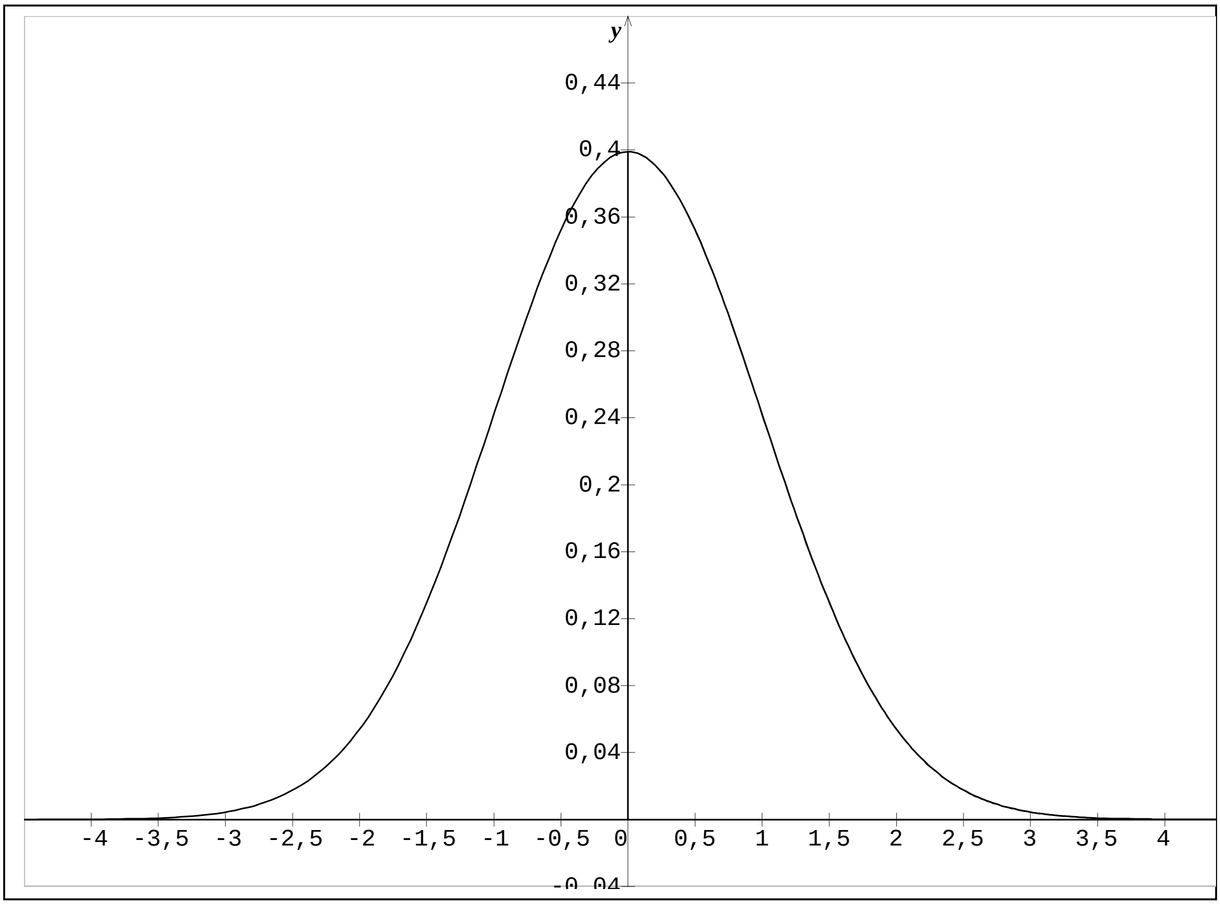


Remarques.

- La moyenne et l'écart-type d'un échantillon extrait au hasard d'une vaste population ne sont que des estimateurs très approximatifs de la moyenne et de l'écart-type de cette population.
- La loi normale n'est en fin de compte qu'une représentation de la réalité qui n'est pertinente que pour des populations très vastes ou encore des chroniques à très long terme (trajectoires des cours boursiers par exemple) ; il serait téméraire (et dangereux) de croire que des échantillons de petite taille reproduisent à l'identique les paramètres de la vaste population dont ils sont issus ; il en va de même pour les prédictions à court terme dans le domaine financier notamment : la récente crise financière nous le rappelle avec beaucoup de pertinence.
- l'approche par la loi normale est aujourd'hui fortement contestée dans le domaine de la finance et les modèles alternatifs se multiplient : approche fractale (B. MANDELBROT), théorie du chaos, approche par les processus de MARKOV (A. ORLEAN), recours aux lois stables de LEVY, modèle avec saut de R. MERTON, modèle GARCH,…

De la signification de l'écart-type.

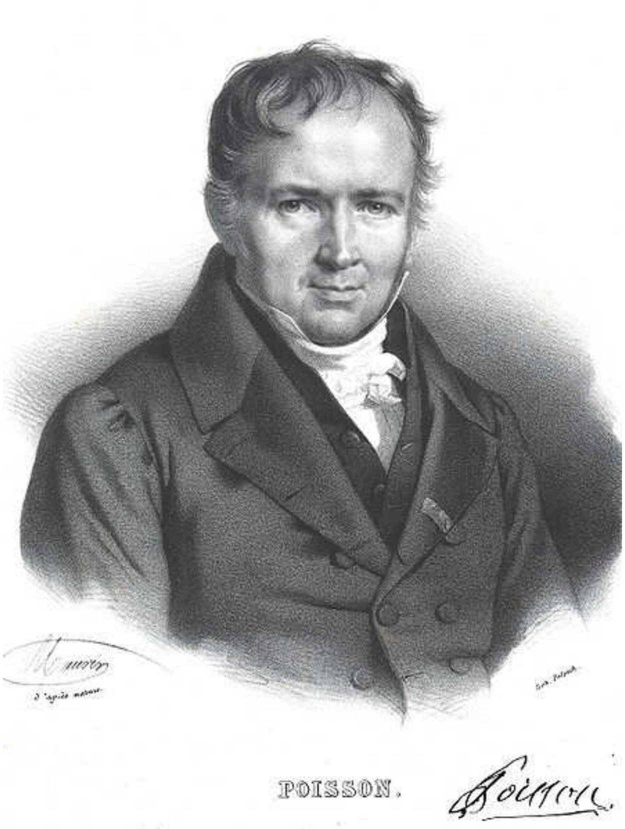
L'écart-type d'une distribution désigne l'écart moyen des éléments de cette distribution par rapport à sa moyenne.
Rappelons-nous que la loi normale centrée réduite présente une moyenne égale à 0 et un écart-type égal à 1. Cela signifie que l'ensemble des réels repris dans cette distribution sont, en moyenne, distants de la moyenne de 1 ; bien entendu la distance qui sépare bon nombre des éléments de la moyenne est inférieure à 1 tandis que d'autres (ceux qui se trouvent notamment dans les queues de distribution) sont distants de plus de 1.



Les éléments repris sur les droites parallèles à l'axe des ordonnées et passant par x = 0,5 ou x = – 0,5 sont distants de 0,5, soit ½ écart-type ; en revanche les points situés sur les droites parallèles à l'axe des ordonnées et passant par x = 2 ou x = – 2 sont distants de 2, soit 2 écart-types.

L'écart-type est donc, en quelque sorte, un indice de **dispersion** ; c'est pour cette raison qu'il est utilisé pour mesurer le risque en finance. On le désigne alors par le terme de **volatilité** et on l'exprime en pourcentages : volatilité = écart-type / moyenne.

LA LOI DE POISSON.



La distribution de Poisson s'applique aux variables quantitatives discrètes définies par le nombre d'événements observés dans le cas où ces événements sont rares et se produisent de manière indépendante et aléatoire dans l'espace et dans le temps.
Cette distribution est caractérisée par le seul paramètre λ qui est précisément la moyenne de la distribution.

Siméon Denis POISSON, mathématicien français (1781-1840)

La distribution de Poisson peut s'appliquer :

- Dans des problèmes de gestion : files d'attente, centrales téléphoniques,… ; il s'agit d'événements aléatoires dans le temps.
- En microbiologie : calcul, par exemple, de la probabilité d'observer un certain nombre de bactéries dans une boîte de Pétri ; il s'agit d'événements aléatoires dans l'espace.
- ….

Il s'agit donc de déterminer l'occurrence d'un événement élémentaire par unité de volume, de surface ou de temps.

Exemples de variables aléatoires :

- le nombre de poissons par m^3 d'eau (à ne pas confondre avec la binomiale : nombre de truites par 100 poissons pêchés dans une rivière).
- Le nombre de drosophiles mâles rencontrés pendant 10 minutes.

Formulation mathématique.

$$PR(X = x) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^{x}}{x!}$$

Illustration.

Soit un laborantin observant dans un litre d'eau contaminée la présence de 4.000 bactéries E COLI :

- Quelle est la probabilité d'observer au moins 20 bactéries dans 5 cm³ d'eau ?
- Quelle est la probabilité d'observer strictement entre 10 et 20 bactéries dans 5 cm³ d'eau ?
- Quelle est la probabilité d'observer au plus 15 bactéries dans 4 cm³ d'eau ?

$$\Pr(X \geq 20)_{\lambda\ =\ 20} = 1 - \Pr(X \leq 19) = 1 - 0,4703 = 0,5297$$
$$\Pr(10 < X < 20)_{\lambda\ =\ 20} = \Pr(X \leq 19) - \Pr(X \leq 10) = 0,4703 - 0,0108 = 0,4595$$
$$\Pr(X \leq 15)_{\lambda\ =\ 16} = 0,4667$$

- Dans le 1er et le 2ème exemples, λ = 20 car un litre d'eau contient 1000 cm³ et par conséquent 200 fois 5 cm³ ; or le laborantin observe en moyenne 4.000 bactéries dans 1 litre d'eau, il doit, par conséquent, en observer, en moyenne, 20 = 4000 / 200 dans 5 cm³ d'eau.
- Il suffit ensuite de consulter les **tables** de la loi de POISSON ; les entêtes de colonnes nous donnent les valeurs de λ ; la première colonne correspond aux valeurs cibles : 20 dans le 1er cas.
- **Prudence** : les tables nous renvoient les probabilités qu'une valeur soit inférieure ou égale à la cible ($\leq$) ; il faut dès lors adapter les calculs. Dans le 1er exemple, la probabilité d'observer au moins 20 bactéries correspond à la probabilité totale, c'est-à-dire 1, moins la probabilité d'en observer 19 ou moins.
- L'utilisation de la loi de poisson requiert une bonne connaissance des unités de mesure : surface, volume, poids, temps,…

STATISTIQUES : EXERCICES.

LA LOI BINOMIALE.

Exercice N° 1.

Soit un dé à 10 faces ; sur chacune des faces est frappé un chiffre compris entre 1 et 10.

- quelle est la probabilité d'obtenir 8 fois la face portant le chiffre 10 au terme de 10 lancers successifs ?
- quelle est la probabilité d'obtenir au moins 8 fois la face portant le chiffre 10 au terme de 10 lancers successifs ?

Exercice N° 2.

Calculer la probabilité d'obtenir 3 républicains dans un échantillon de 6 personnes tirées au hasard à partir de la population américaine (la proportion de démocrates est de 60 %).

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 4 démocrates au sein de ce même échantillon ?

LA LOI NORMALE : MOYENNE, VARIANCE & ECART-TYPE.

Exercice N° 1.

Soit action dont la chronique des 10 derniers cours en € s’établit de la manière suivante ; calculer la moyenne, la variance et l’écart-type.

Cours: X	**P(X)**	**P(X) * X**	$X - \overline{X}$	$(X - \overline{X})^2$	$(X - \overline{X})^2 * P(X)$
10	0,10				
12	0,10				
16	0,10				
8	0,10				
6	0,10				
14	0,10				
16	0,10				
15	0,10				
11	0,10				
9	0,10				
	$\overline{X}$			σ^2	
				σ	

Exercice N° 2.

Soit une population dont le QI moyen s’établit à 100 avec un écart-type de 20 ; quelle est la probabilité de trouver au sein d’un échantillon de 100 personnes issues de cette population au moins un QI supérieur à 110 ?

LA LOI DE POISSON.

Exercice N° 1.

Un zoologiste étudie les passages d'une espèce de chauve-souris en lisière d'un espace boisé à Marche-en-Famenne ; il effectue un comptage d'individus et répertorie en moyenne 3 individus par 30 minutes.

- Quelle est la probabilité qu'il détecte 7 individus en 1 heure ?
- Quelle est la probabilité qu'il détecte au plus 7 individus en 1 heure ?
- Quelle est la probabilité qu'il détecte entre 2 et 4 individus par 15 minutes ?

Exercice N° 2.

L'institut National des Statistiques s'est intéressé au nombre d'accidents intervenus durant la période de pointe sur une durée de un quart d'heure. Cette étude montre qu'en moyenne, on observe 2 accidents par quart d'heure en pleine heure de pointe.

- Quelle est la probabilité de n'observer aucun accident en 1 quart d'heure ?
- Quelle est la probabilité d'observer plus de 3 accidents en 1 quart d'heure ?
- Quelle est la probabilité de n'observer aucun accident en 1 heure ?